Conjuntos numéricos

El grupo Matema, que habitualmente colabora con TE, está formado por cuatro profesores de EGB en activo, que colaboran con el ICE de la UPV, la Consellería de Educación de la Comunidad Valenciana y con los movimientos de Renovación Pedagógica de las Escuelas de Verano de Zaragoza, Granada, Baleares, Alto Palencia... En la actualidad está desarrollando el proyecto "Los Niveles Básicos de Referencia en el Ciclo Inicial. Estudio inductivo-deductivo a través de grupos de ensayo-control"
El grupo nació al constatar diariamente en las aulas la enorme desconexión existente entre éstas y la vida real, y al comprobar que alumnos que saben los conocimientos matemáticos que aparecen en los distintos cursos, no saben aplicarlos para resolver sus problemas cotidianos. El informe que en esta ocasión publicamos es la ponencia que el grupo presentó en las I Jornadas sobre Matemáticas del Ciclo Superior, BUP y FP, patrocinadas por la Consellería de Educación de la Comunidad Autónoma Valenciana.

Grupo MATEMA

Viviendo día a día la enseñanza, todos hemos escuchado frases como:

- «No lo entiendo, es un alumno aceptable_ en las demás áreas, pero su rendimiento en Matemáticas...»

- «Mi gran preocupación son las Matemáticas, dice un alumno. El caso es que las estudio, pero no me entran.»

- A los padres se les oye decir: «No encuentro el modo de conseguir que mi hijo aprenda Matemáticas.»

¿Dónde reside el problema central de la enseñanza de las Matemáticas? Según los resultados estadísticos obtenidos a partir de las encuestas aplicadas a profesores de Segunda Etapa (Ciclo Superior), todos coinciden:

- Exceso de abstracción.

- Falta de motivación.

- Falta de experimentación.

- No se respeta la psicología del niño. - Los contenidos vienen impuestos y expuestos, de forma que se desemboca en el mecanicismo, pero no en la comprensión a fondo de la situación matemática.

Ante toda esta serie de datos el lema que preside nuestro trabajo es: **«No se puede coger peras de un peral en flor, ni pedir peras a un peral que no florece.»**

Nos hemos apoyado en los estudios de Jean Piaget. Sus principios psicológicos entresacados de su larga y extraordinaria labor son los que nos han servido de base para elaborar una metodología de trabajo.

Nuestra hipótesis de trabajo parte de que en todo alumno existe una aptitud en potencia para la comprensión de las Matemáticas, pero esa aptitud sola no es suficiente, necesita desarrollarse a través de un método adecuado que ha de recurrir a una serie de condiciones que serán la base de todo el desarrollo posterior. Esas condiciones a las que hemos aludido son:

- Que utilice la observación.

- Que llegue al concepto a través de la observación.

- Que produzca una reflexión sobre las estructuras lógicas de la inteligencia.

- Que potencie el lenguaje oral y el gráfico, estando auténticamente interdisciplinado este lenguaje matemático con las demás áreas y viceversa.

Así pues, de un lado estaría la necesidad que las Matemáticas se adaptasen a la vida real y de otro no contrario, sino complementario, se enseñase a pensar, a aprender Matemáticas en la vida y a desarrollar las estructuras lógicas que sería, en definitiva, desarrollar lo que Piaget denomina **«acciones y operaciones»** y de lo que derivan directamente las Matemáticas. Recordad que solamente se aprende a hacer, haciendo, y que por eso debemos de satisfacer la capacidad creadora de nuestros alumnos. Al comenzar cualquier actividad deben tener elementos de apoyo para que puedan empezar a trabajar y partir siempre de experiencias concretas, nunca de algo nuevo o desconocido.

El objetivo que proponemos es que el alumno a través del aprendizaje sea capaz de redescubrir las Matemáticas, comunicar sus experiencias y así llegar a conocer mejor el mundo que le rodea, sabiendo resolver sus problemas de cada día.

Así pues, el desarrollo mental de los niños impone unas limitaciones sobre lo que pueden aprender y en qué condiciones lo aprenden. Intentar que adquieran unos conocimientos a través de la explicación oral, la simbologia y la abstracción no sólo es infructuoso, sino que puede dificultar el aprendizaje posterior, aborreciendo las Matemáticas.

Lo expuesto, ¿qué relación tiene con los CONJUNTOS NUMERICOS? ¿Qué nos preocupa más, la enseñanza de las Matemáticas o lo que los alumnos aprendan? ¿Qué orden de prioridad establecemos ante: programas del M EC, libros de texto, preparación de la materia a explicar o cómo aprenden mejor nuestros alumnos, evaluación de resultados? ¿Los números existen? ¿Nuestros alumnos saben contar en los distintos sistemas de numeración? ¿Sirven para algo las bases de numeración? ¿Antes de poner una operación, comprobamos si somos capaces de inventar una situación problemática con dichos datos?

En la reforma de los programas de Matemáticas de los años 70, los profesores de EGB nos encontramos con la Teoría de Conjuntos, la gran desconocida para la mayoría del profesorado, y sin conocerla ni saber su utilidad tuvimos la necesidad de explicarla a nuestros alumnos, pero la ponencia no va a tratar sobre la Teoría de Conjuntos, pero sí sobre los Conjuntos Numéricos o, como vulgarmente decimos, los N U M E ROS.

- ¿Qué son los números?

- ¿Para qué sirven?

- ¿Qué diferencia hay entre cifra y número?

- ¿En qué se diferencia un número natural de un racional, de un entero?

- ¿A qué le damos más importancia, al resultado de las operaciones o al proceso? - ¿Por qué realizamos las operaciones de izquierda a derecha si leemos de derecha a izquierda?

- ¿Cuántos números hay entre el 3 y el 4?

Reflexionando antes estas y otras muchas preguntas que nos podemos hacer, comprobaremos que es necesario un RIGOR en el lenguaje Matemático.

Entre el tres y el cuatro no hay ningún número, o pueden haber infinitos números. ¿Cómo es posible que siendo la Matemática una ciencia exacta y ante una misma situación podamos contestar, ninguna o infinita? ¿Será que el nada y el infinito es lo mismo?

Mirando dos cigarrillos de la misma cajetilla y marca, nos preguntamos: ¿Son iguales? ¿Hay más cosas iguales en la vida? Nos gustaría que miraseis con una lupa o un microscopio los dos cigarrillos y observaríais la gran cantidad de diferencias que tienen. Los dos cigarros no están hechos con el mismo tabaco, es decir, el tabaco que tiene uno no es el tabaco que tiene el otro. La misma pregunta podríamos hacerla con la boquilla, el papel, etc. Luego si admitimos que los cigarros son diferentes. ¿Cómo es posible en Matemáticas que un cigarro es igual a un cigarro? Los conceptos «es igual a», «no es igual a», ¿los tienen claros nuestros alumnos o saben concretamente a qué se refieren?

Es obvio que uno es igual a uno; si partimos de la realidad de que uno es una propiedad que tiene un conjunto, su cardinal, la cantidad de elementos, su potencia, por tanto cuando decimos o afirmamos que uno es igual a uno, estamos relacionando la cantidad de elementos que tienen dos conjuntos y aquí sí que utilizamos correctamente que la cantidad de elementos que tiene un conjunto es igual a la cantidad de elementos que tiene otro conjunto, pero jamás podremos afirmar que el elemento de un conjunto es igual al elemento del otro conjunto.

Nuestros alumnos a través de experiencias concretas y utilizando el mayor número posible de sentidos tendrían que redescubrir las cifras para escribir los números y comprobarían que las cifras son unos dibujos, representaciones gráficas o símbolos que han nacido del acuerdo establecido entre los hombres y que todos admitimos, pero que no existen en la realidad. Como hemos dicho anteriormente, son una propiedad que tienen los conjuntos.

En las siguientes informaciones:

8 + 7 = 15

8 + 7 = 21

8 + 7 = 13

¿Cómo podríamos afirmar que esas tres afirmaciones son ciertas?

¿Cómo tendríamos que leerlas correctamente para que fueran ciertas?

¿Dónde está el fundamento matemático que demuestra que las tres son ciertas?

Este es el dilema de las Matemáticas, que el alumno observe, experimente, reflexione y que se exprese correctamente con lenguaje oral, escrito, etc.

¿A qué conjunto pertenecen estos números, a N, a Q o a Z?

¿Los alumnos del Ciclo Superior sabrían razonar en la primera igualdad por qué 8 + 7 = 15? Más sencillo todavía, ¿serían capaces de contar correctamente un grupo de ocho días y otro grupo de siete días? Son cosas tan elementales que todos las damos por sabido y en ningún momento nos preocupamos de comprobar si las dominan. Sin embargo, nos preocupamos de las **«torres»** de fracciones, de raíces cuadradas, ecuaciones... Nos debemos preocupar de todo ello, pero comprobando previamente si dominan lo anterior.

¿Qué operación hemos realizado en las actividades anteriores? Me pregunto: ¿Es lo mismo suma que adición? ¿Qué hemos hecho, adiciones o sumas? Vamos a analizarlo, claro que para ello tendremos que expresar una realidad: ocho días y siete días es igual a quince días, ocho días es un sumando, siete días es otro sumando, «y», representa el signo +, quince días es la suma o total. La operación que hemos realizado es la adición.

¿Cuántos elementos tiene la adición, sumando, signo y suma o total? Luego la suma o total es un elemento de la adición. La adición es una operación y la suma o total es el resultado de dicha operación.

Para realizar las adiciones tenemos que saber en qué sistema de numeración trabajamos; todos hemos comprobado anteriormente que en el primer caso trabajamos en el sistema de numeración decimal o base diez; en el segundo caso, en base siete, y en el tercer caso, en base doce, ocho meses y siete meses son...

Con estos ejemplos y otros muchos que cada uno de vosotros tenéis en mente podéis comprobar la gran importancia que tiene el conjunto numérico y que en el Ciclo Superior se da por sabido y es el gran desconocido.

Vamos a comprobar el siguiente ejemplo. Contestad cada uno a este ejercicio tan sencillo en N.

26 : 5 = . Os agradecería que cada uno dieseis vuestra respuesta y vamos a comprobar cuál de las respuestas cumple la igualdad.

¿Qué clase de división acabamos de realizar? ¿En esta operación el 5 es el divisor o el cociente? ¿Qué estamos haciendo, partiendo o repartiendo?

La ley de oro de la división dice:

«Dividendo es igual a divisor por cociente», en el Campo de los N. Por tanto:

$D : d = c$ o $D : c = d$

En el ejercicio 26 : 5 = comprobamos que no hay ningún N que multiplicado por 5 nos dé 26, por tanto ampliaremos la ley de oro a:

$D = d \cdot c + r$

$D = c \cdot d + r$

Llegamos a la conclusión que en N hay dos clases de divisiones, entera y exacta. Las exactas pertenecen a N y las enteras pertenecen a Q, siempre que expresemos el resultado

$$D : d = \frac{D}{D} = \text{No resoluble } (N : R)$$

NOTA.-No resoluble dentro del campo N, o sea N.R, que posteriormente denominaremos número racional, Q.

Al redescubrir el alumno las clases de divisiones, diferencia los N de los Q, por tanto el número racional es el origen de una división que no tiene solución en N.

¿Qué operaciones podemos realizar en N? ¿Qué operaciones podemos realizar en Q? Reflexiones en voz alta:

En N, las aditivas y las multiplicativas. Las operaciones reversible a las anteriores sólo se pueden resolver en ciertos casos. La sustracción solamente cuando el minuendo es igual o mayor que el sustraendo. Y en la división cuando el dividendo es múltiplo del divisor o cociente.

A partir de la sustracción nos aparecerá un nuevo campo numérico donde se puedan resolver todas las sustracciones, que llamaremos Z. De la división aparecerá un nuevo campo, el Q.

¿Qué es un operador? ¿En qué se diferencia cuando presento una operación en horizontal o en vertical, la situación inicial, situación final y el operador? ¿Es lo mismo situación inicial que situación final?

$\cdot \frac{3}{4}$ ¿Qué es un operador, una situación inicial o una situación final? Fijémonos en el 3 y en el 4 ¿Qué signos aparecen en la expresión? El : (signo de la multiplicación) y la - (signo de la división). Vamos a representarlo en forma de operadores:

$\xrightarrow{\cdot 3} \xrightarrow{\cdot 4}$, por tanto cada vez que realicemos encadenada en N estaremos introduciendo el conjunto Q, tal y como hemos explicado anteriormente.

Si queremos transformar la fracción 3/4 es una situación inicial o en una situación final tendremos que decir la fracción real y concreta; por ejemplo: 3/4 de pan será situación inicial cuando sea la cantidad de pan de la que partimos y será situación final si es el 3/4 de pan la cantidad de pan que queremos obtener. ¿Qué relación tiene la situación -inicial y la situación final con las funciones? Para que una situación inicial se transforme en final y viceversa se necesita un operador.

Las operaciones que en Q podemos realizar son:

a) Todas las adiciones, multiplicaciones y divisiones.

b) Sólo las sustracciones en las que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo.

Al clasificar los Q nos encontramos que tenemos que diferenciar entre fracciones y número racional. Todas las fracciones que pertenecen a la misma clase de equivalencia se representan por el mismo número racional, de ahí la importancia de introducir los Q, de todas las formas posibles, de ahí la importancia de introducir los Q, de todas las formas posibles, intuitiva, por operadores, cociente de dos números, etc.

Realicemos el siguiente ejercicio:

3/7 + 7/4 - 2/3 - 5/12 : 4 = ¿Qué solución podemos obtener?:

1.ª 3/4 + 7/4 = 10/4

10/4 · 2/3 = 20/12, 20/12 - 5/12 = 15/12

15/12 : 4 = 15/48

2.ª 3/4 + 14/12 - 5/12 : 4 = 23/12 - 5/12 = 18/12 , 18/12 : 4 = 18/48

3.ª 3/4 + 14/12 - 5/48 = $\frac{36 + 56 - 5}{48}$ = 87/48

Podríamos hacer más combinaciones, pero:

¿Alguna de éstas es correcta?

¿Nuestros alumnos serían capaces de resolver correctamente esta operación?

¿Cómo leerían la información dada?

Tres cuartos y siete cuartos por dos tercios menos cinco doceavos repartidos entre cuatro (se podría enriquecer con situaciones reales, como: a tres cuartos de un pan le añado los siete cuartos por dos tercios y le quito los cinco doceavos repartidos entre cuatro niños.

Recordar lo dicho en un principio, los números no existen y no es lo mismo situación inicial que operador que situación final, de ahí que hayamos dado la expresión anterior mediante una situación real.

¿Qué operaciones tienen prioridad en N? ¿Por qué apareció el paréntesis?

Si en el campo de los N las operaciones multiplicativas tienen prioridad a las adititiva, ¿ocurre lo mismo en el campo de los Q?

De ahí surgió la necesidad del paréntesis para dar prioridad a la operación que no la tiene.

Con qué fracción escribiremos 3/4 de un pan, o tres panes repartidos entre cuatro niños, o un pan dividido en cuatro partes y tomo tres. Por tanto, en toda fracción el numerador es la parte que tomamos y el denominador las partes que hacemos, o el numerador es el número de elementos que tenemos y el denominador el número de elementos a quienes repartimos. Viendo este ejemplo, ¿no generalizamos a veces la expresión? En Matemáticas hay que dar «al César lo que es del César y a Dios lo que es de Dios».

¿La propiedad conmutativa y asociativa, en qué operaciones de N se da?

¿Existe alguna relación entre las propiedades de las operaciones en N y en Q?

Ni en N ni en Q se pueden realizar todas las sustracciones, de ahí la necesidad de crear un nuevo campo numérico, el Z.

Si ordenamos en una recta numérica los naturales, ¿qué podemos comprobar?; si avanzamos hacia la derecha, ¿qué operación realizamos, qué signo lleva el operador? En caso contrario, ¿qué ocurre?

Vamos a tomar casos de la vida real:

- En una recta numérica, ¿cómo representaríamos una línea de tiempo, años antes y después de Cristo?

- ¿Cómo representaríamos el dinero que recibo y el dinero que tengo que pagar?

- En una recta numérica vertical, ¿cómo representar las temperaturas sobre y bajo cero?, ¿cómo representar la altitud y las depresiones sobre y bajo el nivel del mar?

Cada vez que aparece un campo numérico sería conveniente que el alumno conociese su historia de cómo apareció y buscar la interdisciplinariedad que tiene con las demás áreas, y que redescubra que las Matemáticas son una abstracción porque en su momento fueron concretas, de ahí que partiendo de hechos concretos tiene que llegar a la abstracción.

¿Cómo representará un número Natural y un número Entero en una situación real? ¿En qué se diferencia y en qué se identifica el número Natural del número Entero? ¿Sabrá si esos números representan uña situación inicial (S.I.), una situación final (S.F.) o un Operador (O.)?

Una abstracción: - 3 ¿qué es, S.I., S. F. u O.? Añadámosle una cualidad concreta y real de lo que el -3 representa.

Tengo una deuda de 3 ptas.

Pago 3 ptas.

Quiero quedarme con una deuda de 3 pesetas.

Por tanto, no es lógico partir de -3 si quiero pagar 3 ptas. o quedarme con una deuda de 3 ptas.

No es lo mismo: partir de -3 ptas, pagar 3 ptas. que quedarme con una deuda de 3 ptas.

¿Cómo pueden comprender nuestros alumnos los números enteros si solamente trabajan con abastracciones?

Es básico que partan de situaciones concretas y las representen de todas las formas posibles.

¿De qué otra forma puedo representar un Z?

¿Los números que forman un par ordenado son naturales?

¿Qué representa el primer número de un par ordenado?

¿Qué representa el segundo número de un par ordenado?

¿Cómo representaremos un par ordenado en una recta numérica?

¿Cuántas direcciones y sentidos tiene una recta numérica?

¿Qué obtenemos al llevar el par ordenado sobre la recta numérica?

Por tanto, en Matemáticas no sirven los dogmas y por ciencia muy exacta que sea son múltiples los caminos para resolver las situaciones problemáticas.

¿En nuestro trabajo en el aula tenemos presentes las características psicológicas y la madurez de nuestros alumnos?

¿No intentamos muchas veces «coger peras de un peral en flor»?

¿Qué operaciones podremos resolver en Z?

¿Para que un número en Z se transforme en el anterior o el posterior, qué operador tenemos que utilizar?

¿Tenemos que hacer lo mismo con un número en Q?

¿Podemos transformar una operación en otra diferente?

De una adición de sumandos iguales podemos obtener una multiplicación.

Una multiplicación de factores iguales la transformamos en una potencia.

$$0 \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} 6$$

0+ 3 veces 2 = 3 veces 2 = 6 (0 elemento neutro)

$$1 \xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{\cdot 2} 8$$

1 : $2^3 = 2^3 = 8$ (1 elemento neutro)

Los elementos de la potencia son base, exponente y potencia.

¿Qué es la base, qué es el exponente, qué es la potencia?

¿Relacionamos los elementos de la potenciación con la multiplicación, la adición y los sistemas de numeración?

Vamos a relacionar los elementos de la potenciación con los sistemas de numeración:

La base es el sistema de numeración en que trabajamos. El exponente es el nivel del sistema de numeración y la potencia el valor de ese nivel.

¿Sirve para algo que los alumnos dominen las distintas bases o sistemas de numeración?

¿Si buscamos el valor de la base qué hallamos?, ¿y si buscamos el del exponente?, ¿y si hallamos el valor de la potencia?

Por tanto, para la potenciación podemos trabajar las siguientes operaciones: radicación, logaritmación y potenciación.

Al realizar la potenciación nos aparece un nuevo campo numérico R. cuyo estudio corresponde al BUP.